

توزیع احتمالی متغیرهای گسسته

◦ توزیع دو جمله ای ، توزیع پواسن



توزیع دو جمله ایی

آزمایش دوجمله ایی

1. آزمایش دوجمله ایی شامل تعداد ثابتی از آزمایشات میباشد که نتیجه دوحالتی دارد (شکست و پیروزی).
2. احتمال پیروزی P و احتمال شکست $q=1-p$
3. آزمایشات مستقل از هم هستند (رخ دادن یکی بر روی رخ دادن دیگری تاثیر ندارد).

مثال

- پرتاب 10 مرتبه یک سکه
- فرزندان یک خانواده

توزیع دو جمله ایی

احتمال مشاهده دو شیر زمانی که یک سکه سالم را 4 بار پرتاب میکنیم چقدر است؟

HHTT, HTHT, HTTH, THHT, THTH, TTHH

تعداد حالت‌های ممکن برابر است با 6 ($C_2^4 = 6$)

احتمال هر برآمد برابر است با $(0.5)^2(0.5)^2$

احتمال اینکه دو شیر در 4 پرتاب رویت شود برابر است با $6(0.5)^2(0.5)^2 = .375$

توزیع دو جمله ایی

$x =$ تعداد موفقیت ها در n آزمایش دو حالتی میباشد که مقادیر $0, 1, 2, \dots, n,$

در نتیجه تعداد شکست ها برابر است با $n-x$

احتمال x پیروزی در n آزمایش برابر است با : $p^x (1-p)^{n-x}$

تعداد راههایی که میتوان به x پیروزی دست یافت برابر است با

$$C_x^n = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

توزیع احتمالی دوجمله ایی

بنابراین احتمال x موفقیت در n آزمایش دوجمله ایی که احتمال پیروزی با p برابر است میشود:

$$P(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \text{ for } x = 0, 1, \dots, n$$

مثال:

یک امتحان شامل 10 سوال چندگزینه ایی است. هر سوال 5 گزینه دارد که فقط یکی از آنها درست است. شخصی که جواب سوالات را نمیداند تلاش میکند آنها را حدس بزند. چقدر احتمال دارد که او:

a) یک سوال را درست جواب دهد؟

b) تمام سوالات را درست جواب دهد؟

$$n = 10, p = .2$$

$$\text{a. } P(1) = \frac{10!}{1!(10-1)!} (.2)^1 (1-.2)^{10-1} = 10(.2)(.8)^9 = .2684$$

$$\text{b. } P(10) = \frac{10!}{10!(10-10)!} (.2)^{10} (1-.2)^{10-10} = .0000001$$

احتمال تجمعی

$$P(X \leq x) = P(0) + P(1) + \dots + P(x)$$

مثال قبل:

احتمال این که شخص مورد نظر کمتر از 50% سوالات را درست پاسخ دهد چقدر است؟

$$\begin{aligned} P(X \leq 4) &= P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) \\ &= .1074 + .2684 + .3020 + .2013 + .0881 \\ &= .9672 \end{aligned}$$

استفاده از توزیع تجمعی

$$P(X \geq x) = 1 - P(X \leq x - 1)$$

مثال قبل: احتمال اینکه شخص مورد نظر به 5 سوال و یا بیشتر پاسخ درست دهد چقدر است؟

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4)$$

$$= 1 - .9672$$

$$= .0328$$

استفاده از توزیع تجمعی

$$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a - 1)$$

مثال قبل:

احتمال اینکه شخص مورد نظر 5 و یا 6 سوال را درست پاسخ دهد چقدر است؟

$$\begin{aligned} P(5 \leq X \leq 6) &= P(X \leq 6) - P(X \leq 4) \\ &= .9991 - .9672 \\ &= .0319 \end{aligned}$$

$$(or P(5 \leq X \leq 6) = P(5) + P(6) = .0264 + .0055 = .0319)$$

میانگین و واریانس توزیع دو جمله ایی

$$\mu = np$$

$$\sigma^2 = np(1 - p)$$

$$\sigma = \sqrt{np(1 - p)}$$

مثال قبل:

میانگین و واریانس درست پاسخ دادن شخص مورد نظر چقدر است

$$\mu = np = 10(0.2) = 2$$

$$\sigma = \sqrt{np(1 - p)} = \sqrt{10(.2)(1 - .2)} = 1.26$$

توزیع پواسن

متغیر تصادفی پواسنی

متغیر پواسنی تعداد نسبتاً کم پیشامد است که در یک دوره زمانی بصورت تصادفی و مستقل از هم رخ میدهند

مثال

تعداد افرادی که همزمان به در بانک میرسند.
تعداد تصادفات در روز در یک مکان مشخص.

توزیع احتمالی پواسن

اگر X دارای توزیع پواسن باشد، تابع احتمالی آن به صورت زیر نوشته میشود.

$$P(x) = \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!} \text{ for } x = 0, 1, 2, \dots$$

در این فرمول μ میانگین تعداد موفقیت ها در یک واحد و e عدد نپر میباشد.

تنها در این توزیع میانگین و واریانس باهم برابرند.

$$\sigma^2 = \mu$$

مثال:

تعداد ماشینهایی که در یک ساعت به تعمیرگاه میرسند دارای توزیع پواسن با میانگین 8 ماشین در یک ساعت است. احتمالات زیر را محاسبه کنید.

1. هیچ ماشینی بعد یک ساعت به تعمیرگاه مراجعه نکند؟

2. حداکثر 8 ماشین بعد یک ساعت به تعمیرگاه مراجعه کنند؟

$$\mu = 8$$

$$a. P(0) = e^{-8}8^0/0! = .0003$$

$$b. P(X \leq 8) = P(0) + P(1) + \dots + P(8)$$

$$P(X \leq 8) = .5925$$

مثال قبل:

1. هیچ ماشینی در طول 2 ساعت به تعمیرگاه نیاید؟
2. حداکثر 10 ماشین در طول 2 ساعت به تعمیرگاه بیایند؟
3. حداقل 15 ماشین در طول 2 ساعت به تعمیرگاه بیایند؟

$$\mu = 16.$$

a. $P(0) = e^{-16}16^0/0! = 0.0000001$

b. $P(X \leq 10) = 0.0774$

c. $P(X \geq 15) = 1 - P(X \leq 14) = 1 - .3675 = .6325$