

آنالیز واریانس یکطرفه

ANOVA

- بسیاری از مطالعات بدنبال مقایسه میانگین بین بیش از دو گروه هستند.
- اگر میانگین دو گروه را توسط آنالیز واریانس مقایسه کنیم، نتایج با آزمون t برابر خواهد بود. بنابراین آنالیز واریانس برای 2 گروه مستقل هم ارز است با آزمون t .
- یکطرفه بودن آنالیز واریانس یعنی از یک جهت محدود شده است یا بدنبال سنجیدن فقط اثر یک متغیر را بر روی میانگین هستیم.

فروض

- مشاهدات باید از نمونه تصادفی و مستقل از هم استخراج شود.
- مشاهدات در هر گروه باید توزیع نرمال داشته باشند.
- آنالیز واریانس نسبت به تعداد حجم نمونه مقاوم است ولی تعداد نمونه در هر گروه نباید کمتر از 30 باشد.
- لازم نیست حجم نمونه در تمام گروه ها یکسان باشد.
- واریانس گروه ها تقریبا با هم برابر هستند.

چرا از آزمون t برای مقایسه میانگین بیش از 2 گروه استفاده نمیشود؟

چرا به جای استفاده از آنالیز واریانس از چند آزمون مقایسه میانگین استفاده نمیکنیم؟

اگر گروه ها را دو به دو با استفاده از آزمون t مقایسه کنیم، خطای ما در سطح مورد نظر مثلا 0/05 باقی نماند و افزایش میابد.

هر چه تعداد گروه ها بیشتر باشد تعداد مقایسات هم بیشتر میشود و خطا به شدت افزایش میابد.

ANOVA یک آنالیز ساده برای مقایسات چند گانه است

- خطا در سطح مورد نظر باقی میماند.
- اماره آزمون F است که اگر رد شود یعنی میانگین حداقل دو گروه با هم متفاوتند.
- با آزمونی میتوان جوامعی که میانگین نابرابر دارند را مشخص نمود.

فروض ANOVA

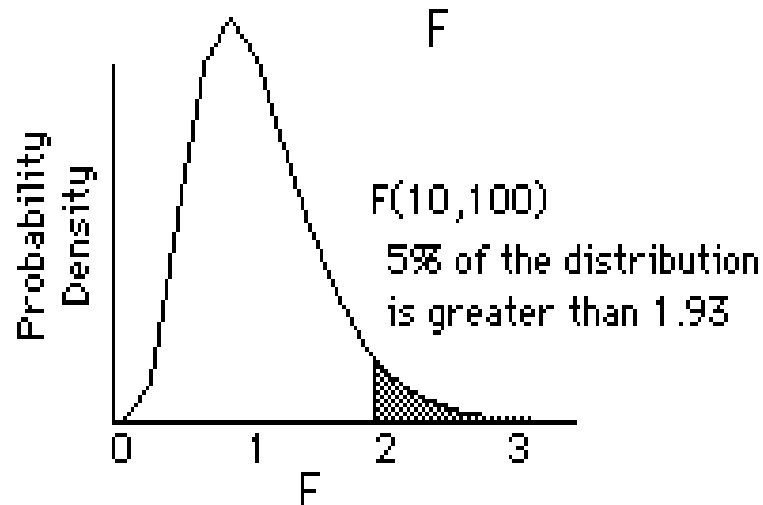
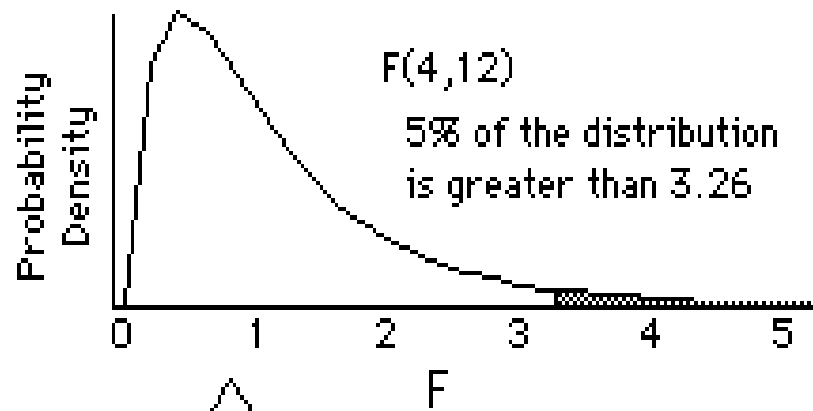
➤ فرض صفر برای آنالیز واریانس برابری میانگین گروه های مختلف است.

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_k$$

➤ فرض مقابل آنالیز واریانس این است: حداقل میانگین دو جامعه با هم متفاوتند.

➤ آماره آزمون F است.

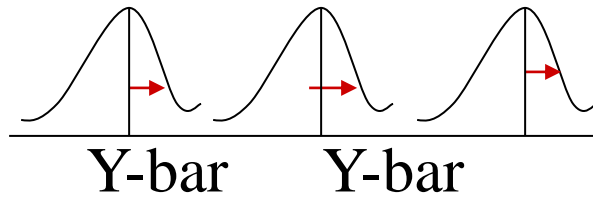
F جدول



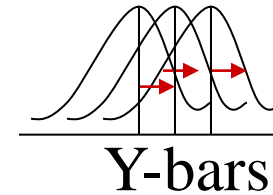
آنالیز واریانس

- در آنالیز واریانس هدف مقایسه میانگین بیش از دو جامعه است، پس چرا نامش آنالیز واریانس است؟
- این آزمون با در نظر گرفتن واریانس و پراکندگی درون گروه ها و همینطور لحاظ کردن پراکندگی و یا فاصله بین گروه ها به آنالیز میپردازد.
- هر چه پراکندگی درون یک گروه نسبت به پراکندگی و فاصله اش با گروه دیگر کمتر باشد احتمالاً میانگین این دو جامعه متفاوت است.
- اگر آماره آزمون F به اندازه کافی بزرگ باشد یعنی پراکندگی بین گروه ها نسبت به درون گروه ها زیاد است پس فرض صفر رد میشود.

آنالیز واریانس



Different groups, different means.



Similar groups, similar means.

جدول آنالیز واریانس

منبع تغییرات	درجه آزادی	مجموع مربعات	میانگین مجموع مربعات	F
تیمار	p-1	SSB	MSB=SSB/p-1	MSB/MSE
خطا	N-p	SSE	MSE=SSE/N-p	
کل	N-1	SST=SSB+SSE		

$$SSB = \sum_{i=1}^k n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2,$$

$$SSE = \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x}_i)^2$$

مثال آنالیز واریانس:

Control	Treat #1	Treat #2
35	38	47
38	43	53
42	45	42
34	52	45
28	40	46
39	46	37

در تحقیقی توانایی حرکت در بیماران خاصی در سه گروه سنجیده شده است. گروه کنترل که مداخله ایی نداشتند، گروه تیمار 1 که فیزیوتراپی شده اند و گروه تیمار 2 که علاوه بر فیزیوتراپی مشاوره هم شده اند. هدف مقایسه یکسان بودن میانگین توانایی حرکت در این گروه ها است.

ANOVA

➤ فرض آنالیز:

یکسان بودن میانگین ها در مقابل حداقل دو میانگین باهم برابر نیستند.

➤ آنالیز واریانس همیشه یک آزمون دوطرفه است.

➤ از آنجایی که آنالیز واریانس توانایی مشخص کردن جوامع با میانگین های غیر همسان را ندارند، باید *post hoc* نیز انجام شود.

محاسبه میانگین کل و میانگین گروه ها

➤ میانگین 18 مشاهده = 41.7

➤ میانگین گروه ها :

گروه کنترل = 36

گروه تیمار 1 = 44

گروه تیمار 2 = 45

محاسبه SSE

➤ این شاخص حاصل جمع 3 مقدار است:

➤ در گروه کنترل:

- $(35 - 36)^2 + (38 - 36)^2 + (42 - 36)^2 + (34 - 36)^2 + (28 - 36)^2 + (39 - 36)^2 = 118$

➤ در گروه تیمار 1:

- $(38 - 44)^2 + (43 - 44)^2 + (45 - 44)^2 + (52 - 44)^2 + (40 - 44)^2 + (46 - 44)^2 = 122$

➤ در گروه تیمار 2:

- $(47 - 45)^2 + (53 - 45)^2 + (42 - 45)^2 + (45 - 45)^2 + (46 - 45)^2 + (37 - 45)^2 = 142$

- $SSE = 118 + 122 + 142 = 382$

محاسبه SSB:

➤ برای محاسبه این مقدار باید میانگین گروه ها را از میانگین کل کم کنیم به توان 2 برسانیم و در حجم نمونه هر گروه ضرب کنیم.

➤ میانگین کل : 41.7

➤ میانگین کنترل: 36

➤ میانگین تیمار 1: 44

➤ میانگین تیمار 2: 45

- $SSB = 6*(36 - 41.7)^2 + 6*(44 - 41.7)^2 + 6*(45 - 41.7)^2 = 292$

محاسبه MSE و MSB

- $MSB = SSB / (p-1)$
- $MSB = 292 / (3-1) = 146$
- $MSE = SSW / (N-p)$
- $MSE = 382 / (18 - 3) = 25.47$

محاسبه آماره F

➤ آماره آزمون برابر است با : MSB/MSW

➤ $F = 146/25.47 = 5.73$

➤ اگر مقدار آماره به اندازه کافی بزرگ باشد فرض صفر رد میشود.

➤ مقدار F جدول:

این توزیع یک توزیع همیشه مثبت است که دارای دو درجه آزادی است.
درجه آزادی اول، درجه آزادی صورت و درجه آزادی دوم، درجه آزادی مخرج است.

جدول آنالیز واریانس

منبع تغییرات	درجه آزادی	مجموع مربعات	میانگین مجموع مربعات	F
تیمار	3-1	292	146	5.73
خطا	18-3	382	25.47	
کل	18-1			

$$F(2, 15) = 3.68$$

جدول F

F - Distribution ($\alpha = 0.05$ in the Right Tail)

df ₂ \ df ₁	Numerator Degrees of Freedom								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54
2	18.513	19.000	19.164	19.247	19.296	19.330	19.353	19.371	19.385
3	10.128	9.5521	9.2766	9.1172	9.0135	8.9406	8.8867	8.8452	8.8123
4	7.7086	9.9443	6.5914	6.3882	6.2561	6.1631	6.0942	6.0410	6.9988
5	6.6079	5.7861	5.4095	5.1922	5.0503	4.9503	4.8759	4.8183	4.7725
6	5.9874	5.1433	4.7571	4.5337	4.3874	4.2839	4.2067	4.1468	4.0990
7	5.5914	4.7374	4.3468	4.1203	3.9715	3.8660	3.7870	3.7257	3.6767
8	5.3177	4.4590	4.0662	3.8379	3.6875	3.5806	3.5005	3.4381	3.3881
9	5.1174	4.2565	3.8625	3.6331	3.4817	3.3738	3.2927	3.2296	3.1789
10	4.9646	4.1028	3.7083	3.4780	3.3258	3.2172	3.1355	3.0717	3.0204
11	4.8443	3.9823	3.5874	3.3567	3.2039	3.0946	3.0123	2.9480	2.8962
12	4.7472	3.8853	3.4903	3.2592	3.1059	2.9961	2.9134	2.8486	2.7964
13	4.6672	3.8056	3.4105	3.1791	3.0254	2.9153	2.8321	2.7669	2.7144
14	4.6001	3.7389	3.3439	3.1122	2.9582	2.8477	2.7642	2.6987	2.6458
15	4.5431	3.6823	3.2874	3.0556	2.9013	2.7905	2.7066	2.6408	2.5876
16	4.4940	3.6337	3.2389	3.0069	2.8524	2.7413	2.6572	2.5911	2.5377
17	4.4513	3.5915	3.1968	2.9647	2.8100	2.6987	2.6143	2.5480	2.4943
18	4.4139	3.5546	3.1599	2.9277	2.7729	2.6613	2.5767	2.5102	2.4563
19	4.3807	3.5219	3.1274	2.8951	2.7401	2.6283	2.5435	2.4768	2.4227
20	4.3512	3.4928	3.0984	2.8661	2.7109	2.5990	2.5140	2.4471	2.3928
21	4.3248	3.4668	3.0725	2.8401	2.6848	2.5727	2.4876	2.4205	2.3660
22	4.3009	3.4434	3.0491	2.8167	2.6613	2.5491	2.4638	2.3965	2.3419
23	4.2793	3.4221	3.0280	2.7955	2.6400	2.5277	2.4422	2.3748	2.3201
24	4.2597	3.4028	3.0088	2.7763	2.6207	2.5082	2.4226	2.3551	2.3002
25	4.2417	3.3852	2.9912	2.7587	2.6030	2.4904	2.4047	2.3371	2.2821
26	4.2252	3.3690	2.9752	2.7426	2.5868	2.4741	2.3883	2.3205	2.2655
27	4.2100	3.3541	2.9604	2.7278	2.5719	2.4591	2.3732	2.3053	2.2501
28	4.1960	3.3404	2.9467	2.7141	2.5581	2.4453	2.3593	2.2913	2.2360
29	4.1830	3.3277	2.9340	2.7014	2.5454	2.4324	2.3463	2.2783	2.2229
30	4.1709	3.3158	2.9223	2.6896	2.5336	2.4205	2.3343	2.2662	2.2107
40	4.0847	3.2317	2.8387	2.6060	2.4495	2.3359	2.2490	2.1802	2.1240
60	4.0012	3.1504	2.7581	2.5252	2.3683	2.2541	2.1665	2.0970	2.0401
120	3.9201	3.0718	2.6802	2.4472	2.2899	2.1750	2.0868	2.0164	1.9588
∞	3.8415	2.9957	2.6049	2.3719	2.2141	2.0986	2.0096	1.9384	1.8799

نتیجه گیری:

- با توجه به اینکه مقدار F بدست آمده از F جدول بزرگتر است، فرض صفر رد میشود.
- برای شناسایی اینکه کدام گروه ها میانگین یکسانی ندارند، باید مقایسات دوتایی همانند مقایسه میانگین ها در دو جامعه مستقل با تعدیل خطا انجام شود. به این قسمت $post\ hoc$ میگویند.
- خطا به این صورت تعدیل میشود:
مقدار خطا به تعداد مقایساتی که انجام میشود تقسیم میشود. مثلا در این مطالعه کلا 3 مقایسه 2تایی داریم پس $0.05/3$. یعنی میزان خطا برای هر مقایسه دوتایی برابر است با 0.017