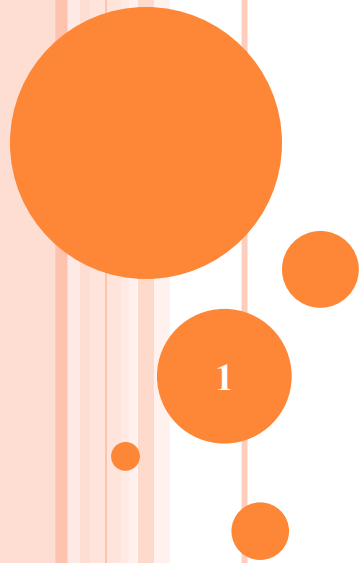


توزيع نرمال

جلسه 6



توزیع احتمالات متصل

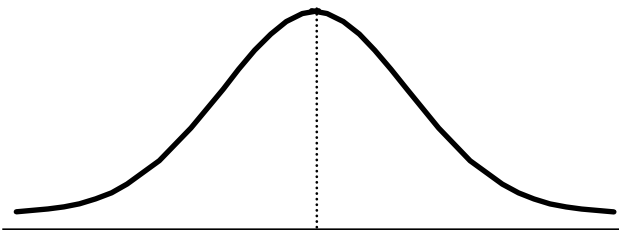
تعریف:

تابع $f(x)$ را در توزیع احتمال ، تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی متصل X می گویند، اگر سطح کل محدود شده آن با منحنی و محور x ها برابر با یک باشد و هر سطح کوچکتر زیر منحنی که بوسیله آن منحنی، محور x ها و عمودهای رسم شده در نقاط a و b بر محور x ها محصور شود، احتمال اینکه x مابین نقاط a و b قرار گیرد را ارائه دهد.

توزیع طبیعی یا نرمال NORMAL DISTRIBUTION

مهمترین توزیع در علم آمار به شمار می آید. اهمیت این توزیع نه تنها از این نظر است که در طبیعت بسیاری از صفات تقریباً دارای توزیع نرمال می باشند بلکه بسیاری از روش های آماری نیز بر اساس این توزیع طراحی شده اند.

شکل ظاهری این توزیع زنگی شکل و متقارن است و دامنه تغییرات آن از منهای بی نهایت تا بعلاوه بی نهایت ادامه دارد و مانند هر منحنی توزیع دیگری سطح زیر منحنی نرمال بین دو مقدار صفت، معرف فراوانی نسبی و یا به عبارت دیگر احتمال آن است که متغیر مورد مطالعه در این فاصله قرار بگیرد، و در نتیجه سطح کل زیر منحنی همواره برابر یک است.



تابع چگالی احتمال توزیع نرمال

متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 است اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \quad -\infty < x < \infty$$

$$-\infty < \mu < \infty$$

$$\sigma > 0$$

$$\pi = 3.14159$$

$$e = 2.71828$$

در این معادله مقادیر π و e اعداد ثابتی هستند که:

پارامترهای توزیع نرمال عبارتند از: μ , σ

ویژگی های توزیع نرمال

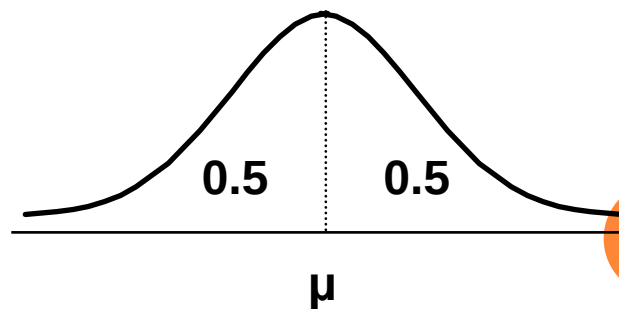
1- این توزیع نسبت به محور $y=\mu$ دارای تقارن است (به عبارت دیگر حول میانگین خود متقارن است).

2- در توزیع نرمال، میانگین، میانه و مد بر هم منطبق و با هم برابرند.

3- سطح کل زیر منحنی نرمال و بالای محور x ها برابر 1 واحد مربع است.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

$$P[X \leq \mu] = P[X \geq \mu] = 0.5$$

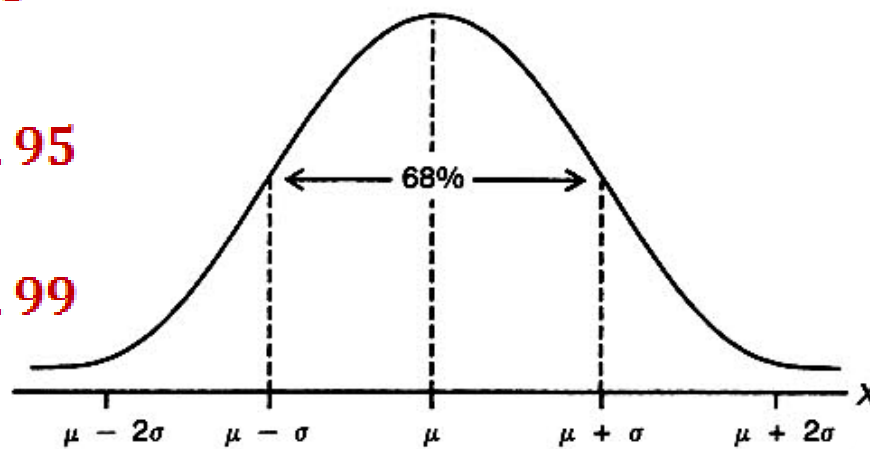


4- در توزیع نرمال دانستن احتمال مساحت محصور بین بعضی از مقادیر مفید می باشد. مثلاً :

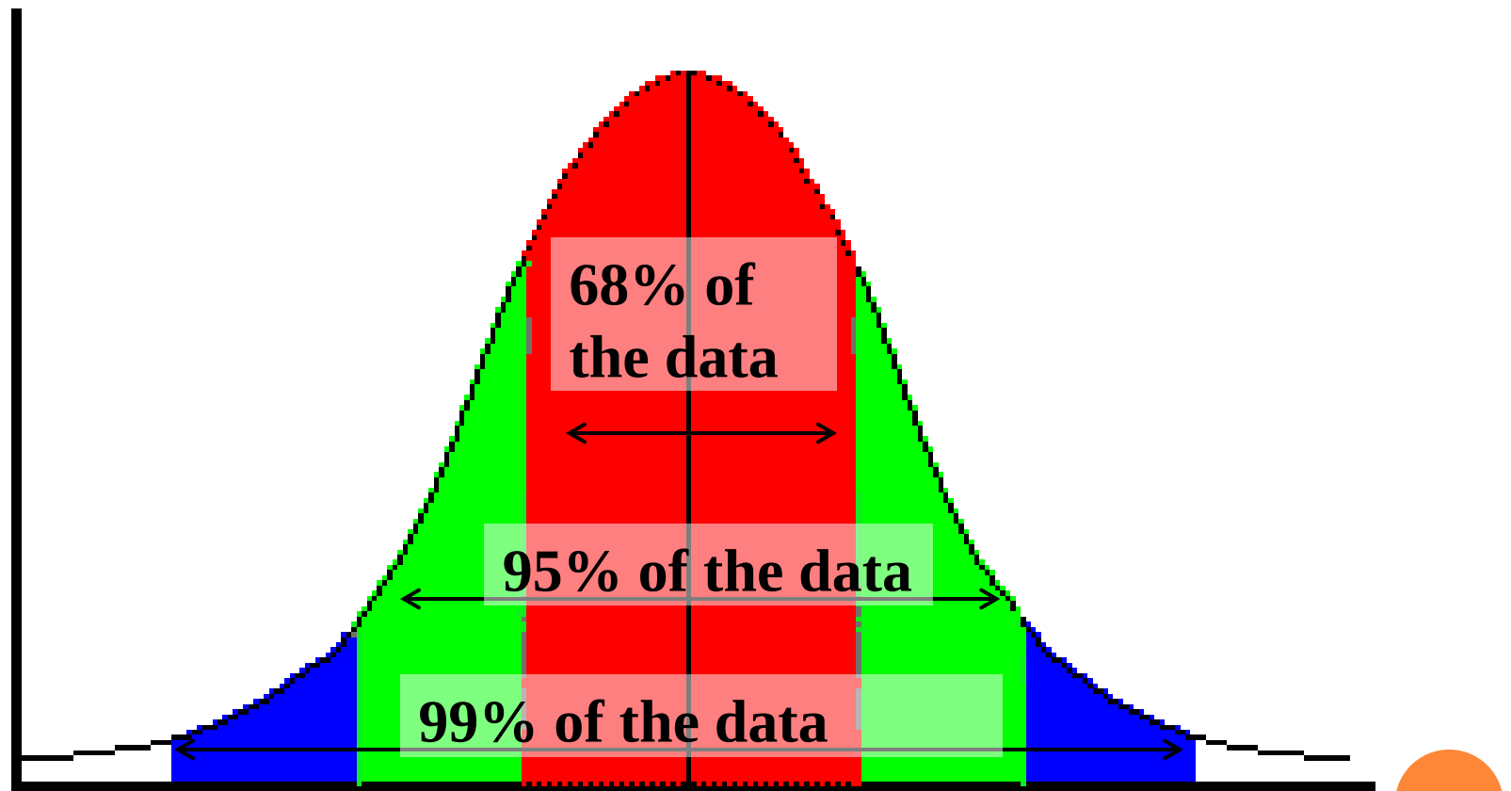
$$P(\mu - \sigma < x < \mu + \sigma) = 0.68$$

$$P(\mu - 2\sigma < x < \mu + 2\sigma) = 0.95$$

$$P(\mu - 3\sigma < x < \mu + 3\sigma) = 0.99$$

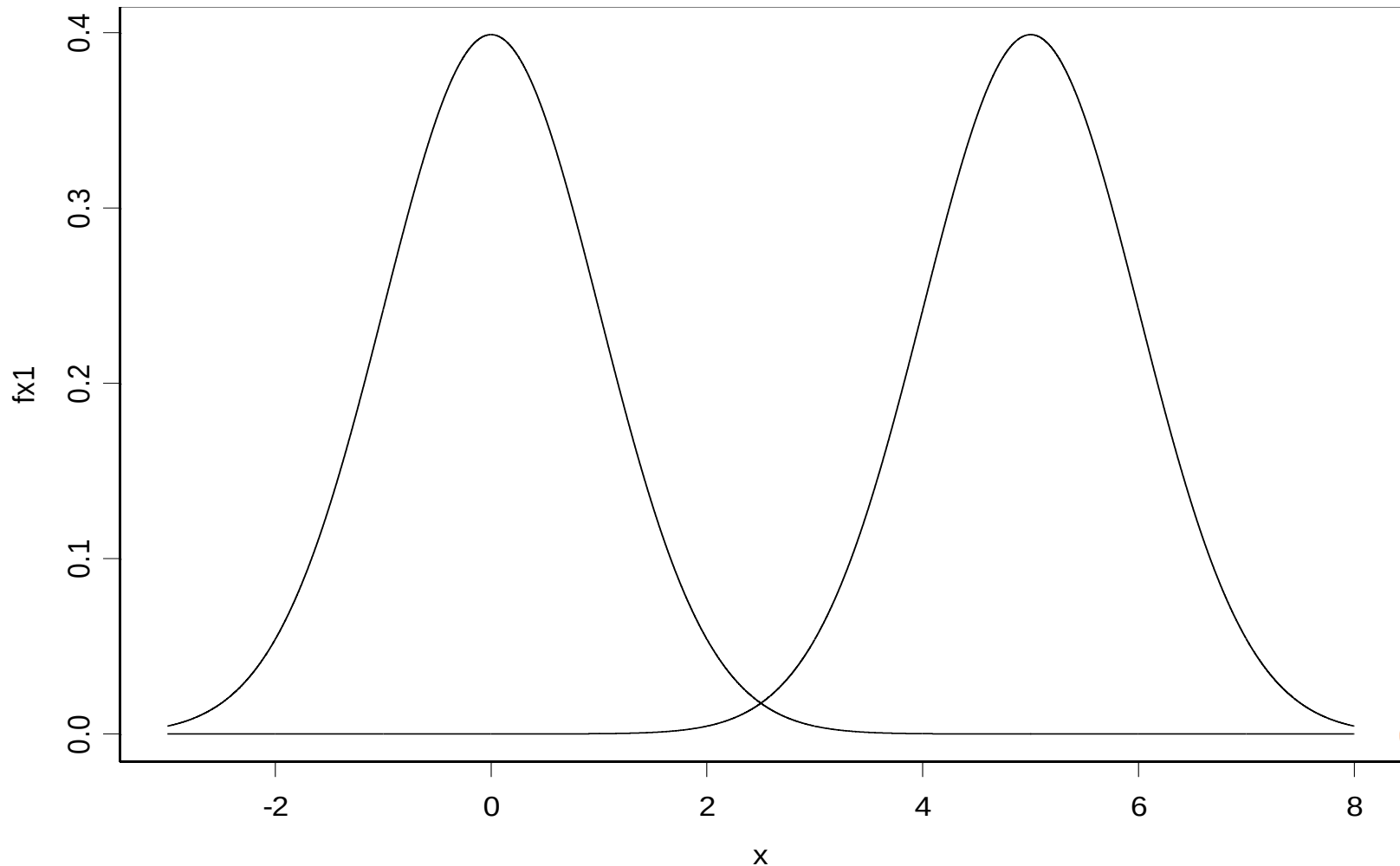


معمولاً برای سهولت کار از بیان کامل توزیع نرمال خودداری کرده و تنها به ذکر میانگین و واریانس توزیع اکتفا می کنند. یعنی تنها نوشته می شود: $N(\mu, \sigma^2)$



NORMAL CURVES: ($\mu=0, \sigma^2=1$) AND ($\mu=5, \sigma^2=1$)

نمودار دو توزیع طبیعی با میانگین های مختلف

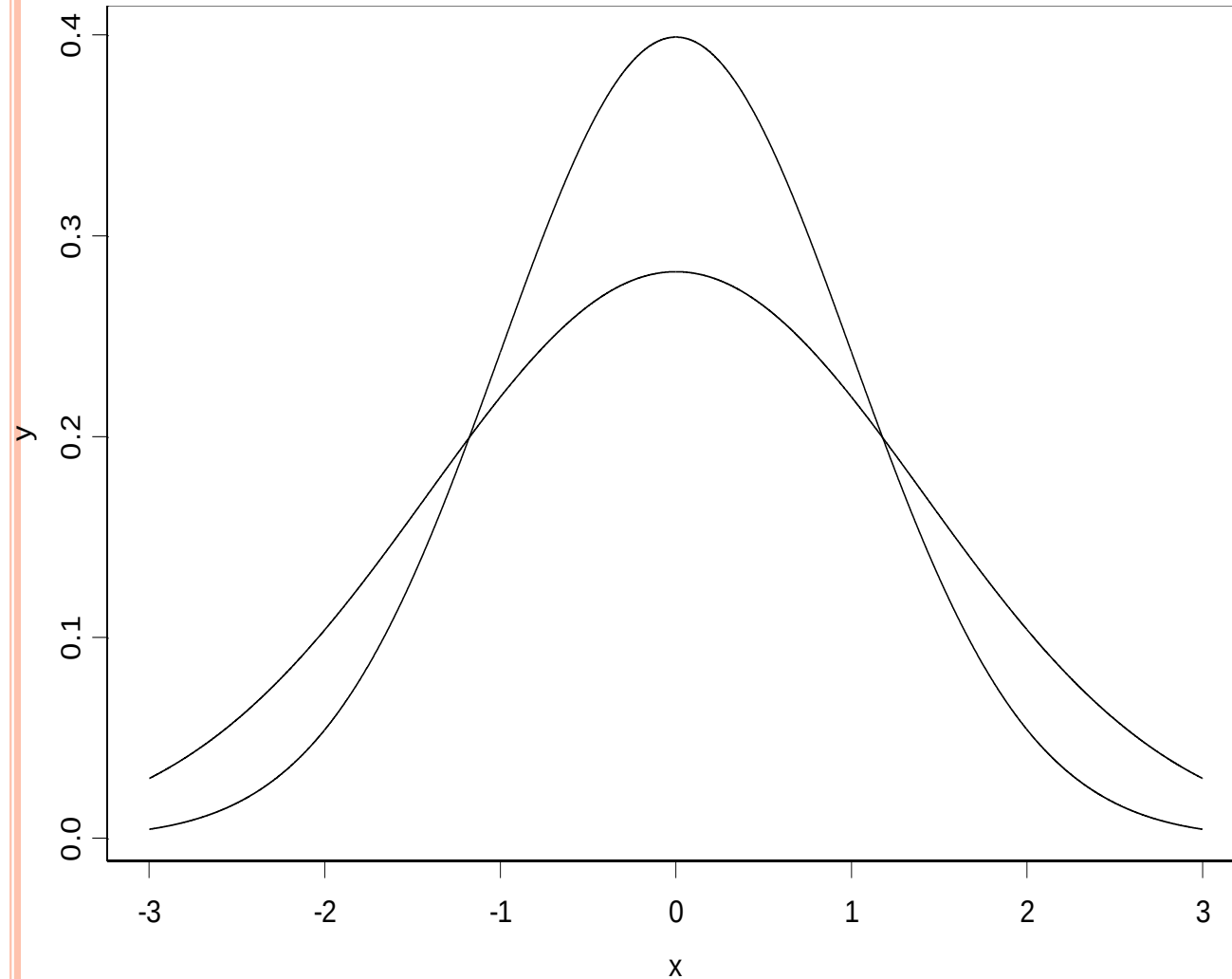


NORMAL CURVES:

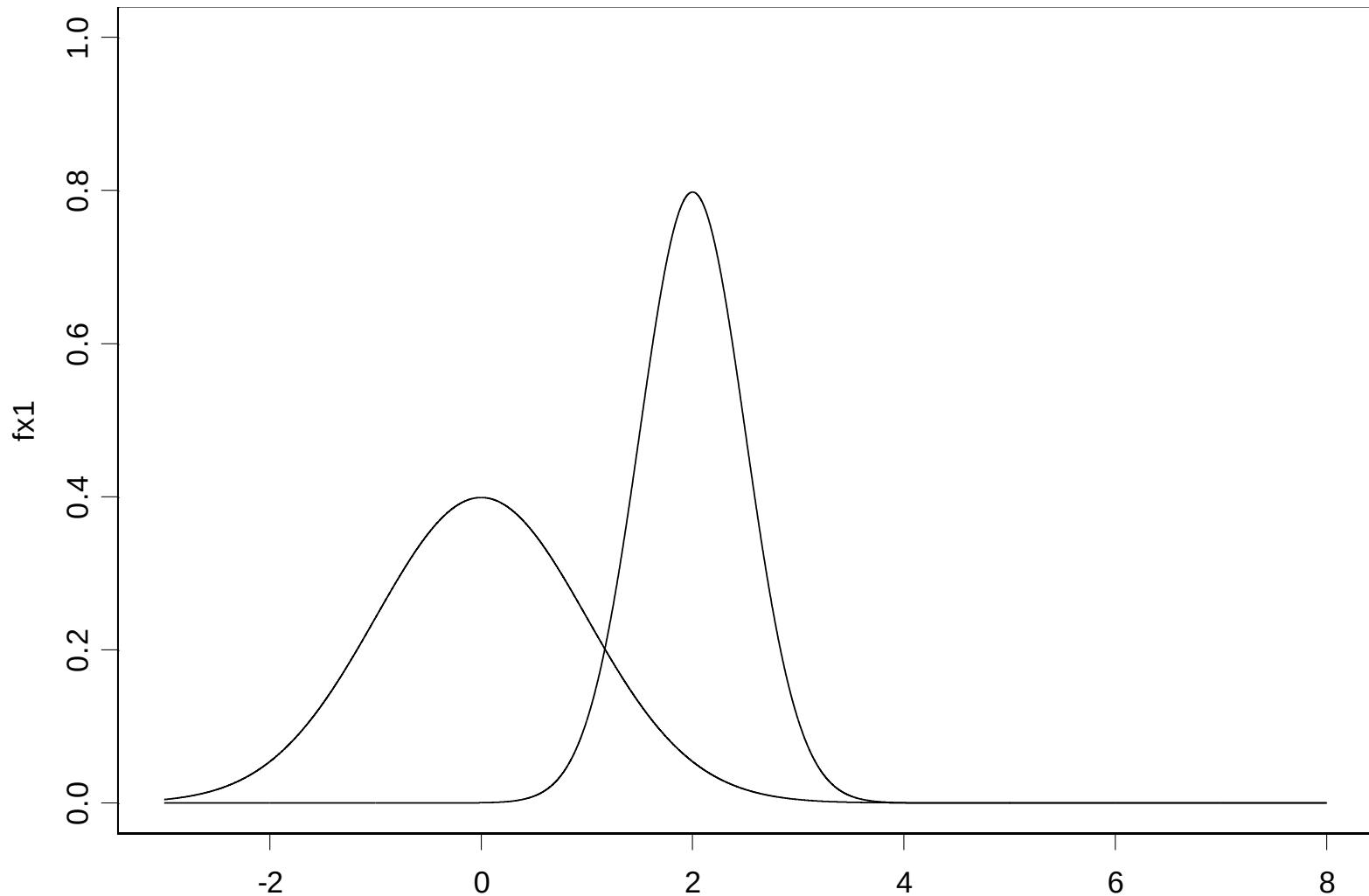
$(M=0, \Sigma^2=1)$ AND $(M=0, \Sigma^2=2)$

نمودار دو توزیع طبیعی با انحراف معیارهای مختلف

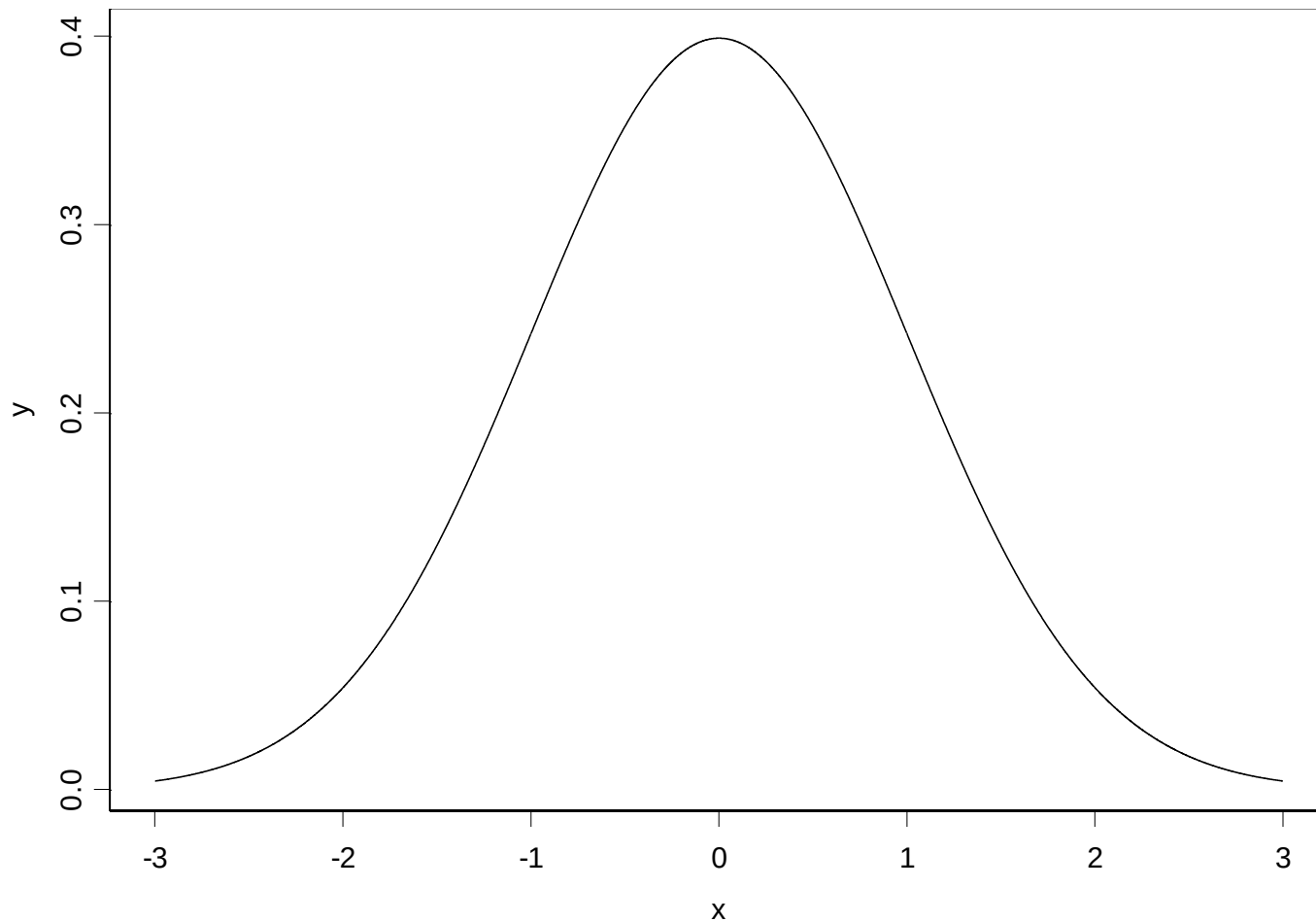
- بدیهی است که هر قدر انحراف معیار توزیعی کمتر باشد، تمرکز سطح زیر منحنی بیشتر در اطراف میانگین خواهد بود.



NORMAL CURVES: ($\mu=0$, $\sigma^2=1$) AND ($\mu=2$, $\sigma^2=0.25$)



THE STANDARD NORMAL CURVE: $\mu=0$, AND $\sigma^2=1$



توزیع نرمال استاندارد

- از آنچه که گفتیم نتیجه می شود که توزیع طبیعی (نرمال) در حقیقت خانواده ای از توزیع ها را مشخص می کند که در آن یک عضو از عضو دیگر بر مبنای μ و σ مشخص می گردد.
- مهمترین عضو خانواده، توزیع طبیعی استاندارد (متعارف یا میزان شده) است و آن را به این نام می خوانند زیرا دارای میانگین صفر و انحراف معیار 1 می باشد.
- برای تبدیل توزیع نرمال به توزیع نرمال استاندارد، کافیه تغییر متغیری ساده به شکل زیر انجام دهیم و z را به عنوان متغیر جدید در معادله قرار دهیم.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

- پس معادله توزیع نرمال استاندارد :

$$f(x) = f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

$$-\infty < z < \infty$$

تمرین

- شکل توزیع نرمال استاندارد را بکشید و ویژگی چهارم بیان شده برای توزیع های نرمال را در مورد توزیع نرمال استاندارد بنویسید.
- سطح زیر منحنی در فاصله $z=0$ تا $z=1$ چقدر است؟
- سطح زیر منحنی در فاصله $z=0$ تا $z=\infty$ چقدر است؟

[illegible]

EXAMPLES

- **Example 1**

$$\begin{aligned} &P(0 < Z < 1) \\ &= \underline{0.3413} \end{aligned}$$

- **Example 3**

$$\begin{aligned} &P(Z \geq 1) \\ &= 0.5 - P(0 < Z < 1) \\ &= 0.5 - 0.3413 \\ &= \underline{0.1587} \end{aligned}$$

- **Example 2**

$$\begin{aligned} &P(1 < Z < 2) \\ &= P(0 < Z < 2) - P(0 < Z < 1) \\ &= 0.4772 - 0.3413 \\ &= \underline{0.1359} \end{aligned}$$

- **Example 4**

$$\begin{aligned} &P(Z \geq -1) \\ &= 0.3413 + 0.50 \\ &= \underline{0.8413} \end{aligned}$$

EXAMPLES

○ Example 5

$$\begin{aligned} &P(-2 < Z < 1) \\ &= 0.4772 + 0.3413 \\ &= \underline{0.8185} \end{aligned}$$

• Example 6

$$\begin{aligned} &P(Z \leq 1.87) \\ &= 0.5 + P(0 < Z \leq 1.87) \\ &= 0.5 + 0.4693 \\ &= \underline{0.9693} \end{aligned}$$

• Example 7

$$\begin{aligned} &P(Z < -1.87) \\ &= P(Z > 1.87) \\ &= 0.5 - 0.4693 \\ &= \underline{0.0307} \end{aligned}$$

مثال

توزیع قند خون در جمعیتی نرمال، با میانگین 100 و واریانس 6/25 می باشد.

الف) چه درصدی از افراد دارای قند خون بین 95 تا 102/5 می باشند؟

$$\begin{aligned}P(95 < x < 102.5) &= P\left(\frac{95 - 100}{2.5} < \frac{x - \mu}{\sigma} < \frac{102.5 - 100}{2.5}\right) \\&= P(-2 < z < 1) \\&= P(-2 < z < 0) + P(0 < z < 1) = 0.47 + 0.34 = \mathbf{0.81}\end{aligned}$$

ب) احتمال اینکه قند خون فردی از 92/5 سانتی گرم در لیتر کمتر باشد چقدر است؟

$$\begin{aligned}P(x < 92.5) &= P\left(\frac{x - 100}{2.5} < \frac{92.5 - 100}{2.5}\right) \\&= P(z < -3) = 0.5 - 0.4987 = \mathbf{0.0013}\end{aligned}$$

تمرین

- 1- در یک توزیع نرمال با میانگین 40 و انحراف معیار 5، مطلوبست:
- (الف) سطحی از منحنی که در طرف چپ نقطه 34 قرار دارد.
 - (ب) سطحی از منحنی که در فاصله 34 و 46 قرار دارد.
 - (ج) سطحی از منحنی که در فاصله 40 تا 50 قرار دارد.
 - (د) سطحی از منحنی که در طرف راست نقطه 48 قرار دارد.
-

- 2- اگر توزیع طول قد جامعه ای نرمال با میانگین $172/5$ سانتیمتر و انحراف معیار $7/5$ باشد. طول قد چه نسبتی از جامعه:
- (الف) در فاصله 165 تا 180 سانتیمتر قرار دارد؟
 - (ب) کوتاه تر از $157/5$ سانتیمتر است؟
 - (ج) بلندتر از 188 سانتیمتر است؟

تمرین ...

3- فرض کنید توزیع قند خون در جمعیتی نرمال با میانگین 115 و واریانس 25 باشد.

(الف) چند درصد افراد این جامعه دیابت دارند؟ (قند خون بالای 126 را دیابت فرض کنید.)

(ب) چند درصد افراد جامعه فوق قند خون بیشتر از 108 دارند؟

(ج) چند درصد افراد جامعه فوق قند خون بین 122 و 103 دارند؟

(د) احتمال اینکه قند خون کمتر از 101 داشته باشند چقدر است؟

(ه) قند خونی را پیدا کنید که قند خون 95 درصد افراد از آن کمتر باشد.

(و) قند خونی را پیدا کنید که قند خون 99 درصد افراد از آن کمتر باشد.